Bellavista, 18 de octubre, 2022

Señor(a):

**RESOLUCIÓN DECANAL N° 128-2022-D-FCNM. -** Bellavista 18 de octubre de 2022.- EL DECANO DE LA FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO:

Visto el Proveído N° 631-2022-D-FCNM recibido en forma virtual el 07 de octubre de 2022, por medio del cual el Presidente del Jurado Evaluador del Proyecto de Tesis presenta el Dictamen, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática, e informa, que el proyecto titulado "IDENTIFICABILIDAD DE UN MODELO ECONÓMICO DE ECUACIONES SIMULTANEAS A PARTIR DE SU ESTRUCTURA VIA TEORÍA DE GRAFOS", presentado por la Srta. Bachiller JUSTINIANO VERA SANDRA DEL PILAR, ha sido evaluado y se resuelve aprobarlo.

**CONSIDERANDO**:

Que, el Art. 32° de la Ley Universitaria Ley N° 30220, norma que las Facultades son unidades de formación académica, profesional y de gestión, el Art. 70° numeral 2, 3 y 5, norma las atribuciones del Decano, a través de los Directores de los Departamentos, Directores de las Escuelas Profesionales, Unidad de Investigación y la unidad de Posgrado, y las demás dependencias, respectivamente; a fin de lograr un desarrollo académico y administrativo eficaz y eficiente, concordante con la misión, visión y valores de la Facultad FCNM;

Que, mediante Resolución del Consejo Universitario Nº 099-2021-CU de fecha 30 de junio del año 2021, se aprobó el Reglamento de Grados y Títulos de Pregrado de la Universidad Nacional del Callao, señalando en el Art. 33° que la titulación profesional por la modalidad de tesis se realiza por uno de los dos procedimientos: a) Sin ciclo de tesis, y b) Con ciclo de tesis; asimismo, en su Art. 73° precisa sobre la documentación que debe presentar el estudiante o egresado para aprobar su proyecto de tesis y acceder a la titulación profesional mediante dicha modalidad;

Que, con Resolución Rectoral Nº 285-2021-R de fecha 17 de mayo de 2021, se aprobó la Directiva Nº 002-2021-R PARA LA TITULACIÓN PROFESIONAL POR LA MODALIDAD DE TESIS CON CICLO DE TALLER DE TESIS EN LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO;

Que, con RESOLUCIÓN DECANAL Nº 021-2019-D-FCNM de fecha 04 de febrero de 2019 se aprueba la APERTURA, INSCRIPCIÓN Y DESARROLLO DEL TERCER CICLO TALLER DE TESIS DE LA FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO, designándose al mismo tiempo, al Profesor ordinario, adscrito al Departamento Académico de Matemática Lic. JUAN BENITO BERNUI BARROS, Coordinador del Tercer Ciclo Taller de Tesis, para la obtención del Título Profesional de Licenciado en Matemática, cumpliendo con las funciones establecidas en los artículos 46°, 47° 48° y 49° del Reglamento de Grados y Títulos de la Universidad Nacional del Callao, aprobado mediante Resolución de Consejo Universitario Nº 099-2021-CU, de fecha el 30 de junio de 2021;

Que, con Resolución de Consejo de Facultad Nº 028-2021-CF-FCNM de fecha 15 de marzo del 2021, se aprobó el PROYECTO DEL III CICLO TALLER DE TESIS PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO, que incluye el Cronograma de Actividades, docentes de cada módulo, **Asesores**, programación horaria, presupuesto y Personal Administrativo, con las modificaciones realizadas por el Consejo de Facultad, el mismo que consta de once (11) páginas;

Que, mediante RESOLUCIÓN DECANAL Nº 092-2022-D-FCNM de fecha 26 de agosto de 2022 se Designó, Jurado Evaluador de Proyecto de Tesis para obtener el título profesional de Licenciado en Matemática, del proyecto titulado: "IDENTIFICABILIDAD DE UN MODELO ECONÓMICO DE ECUACIONES SIMULTANEAS A PARTIR DE SU ESTRUCTURA VIA TEORÍA DE GRAFOS", presentado por la Srta. Bachiller JUSTINIANO VERA SANDRA DEL PILAR; Jurado que está integrado por los siguientes profesores: Dr. EUGENIO CABANILLAS LAPA (Presidente), Lic. ABSALÓN CASTILLO VALDIVIESO (Secretario), Dr. PEDRO CANALES GARCÍA (Vocal), Dr. EDINSON MONTORO ALEGRE (Suplente);

Que, estando vigente el Estado de Emergencia Nacional y de Aislamiento Social Obligatorio establecido en el marco del Decreto de Urgencia N° 026-2020 por las graves circunstancias que afectan la vida de la Nación a consecuencia del brote del COVID-19. Se ha emitido la Resolución de Consejo Universitario N° 068-2020-CU, de fecha 25 de marzo de 2020, mediante la cual se resuelve "autorizar con eficacia anticipada, del 16 de marzo de 2020, y hasta que concluya el estado de emergencia nacional, la modificación del lugar de la prestación de servicios docentes y administrativos;

Que, corrido el trámite de la solicitud del recurrente, el presidente del Jurado Evaluador del Proyecto de Tesis presenta en forma virtual en mesa de partes de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática, el 07 de octubre de 2022, el Dictamen del proyecto de Tesis titulado "IDENTIFICABILIDAD DE UN MODELO ECONÓMICO DE ECUACIONES

SIMULTANEAS A PARTIR DE SU ESTRUCTURA VIA TEORÍA DE GRAFOS", presentado por la Srta. Bachiller JUSTINIANO VERA SANDRA DEL PILAR, el cual ha sido evaluado y cumple con los requisitos para su aprobación;

Estando a lo glosado; a la documentación que obra en autos; a lo normado en el Reglamento de Grados y Títulos; y en uso de las atribuciones que le confiere el Art. 187° del Estatuto de la Universidad Nacional del Callao, modificado en Resolución de Asamblea Universitaria Nº 008-2022-AU, de fecha 28 de junio de 2022 y concordante con el Art. N° 70° de la ley universitaria, Ley N° 30220;

**RESUELVE:**

**1º. APROBAR**, con eficacia anticipada el Proyecto de Tesis para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática, titulado: "**IDENTIFICABILIDAD DE UN MODELO ECONÓMICO DE ECUACIONES SIMULTANEAS A PARTIR DE SU ESTRUCTURA VIA TEORÍA DE GRAFOS**", presentado por la Srta. Bachiller JUSTINIANO VERA SANDRA DEL PILAR, en el Tercer Ciclo Taller de Tesis para la obtención del Título Profesional de Licenciado en Matemática, de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática, de la Universidad Nacional del Callao

**2º. AUTORIZAR**, a la Unidad de Investigación inscribir el tema de tesis y su autor señalado en la presente Resolución, en el Libro de Registro de Tesis, de acuerdo con el Reglamento de Grados y Títulos vigente.

**3º. TRANSCRIBIR**, la presente Resolución a los miembros del Jurado Evaluador, profesor asesor, Escuela Profesional y Departamento Académico de Matemática, Unidad de Investigación, Comisión de Grados y Títulos e interesada, para conocimiento y fines.

**REGÍSTRESE, COMUNÍQUESE Y ARCHÍVESE**

Fdo. **Dr. JUAN ABRAHAM MÉNDEZ VELÁSQUEZ**. -Decano y Presidente del Consejo de Facultad de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao.

Fdo. **Mg. GUSTAVO ALBERTO ALTAMIZA CHÁVEZ**.-Secretario Académico
Lo que transcribo a usted para los fines pertinentes.

**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO**
**FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA**

**Dr. Juan Abraham Méndez Velásquez**
**Decano**

**PROVEÍDO N°631-2022-D-FCNM**

**Ref. :** **Dictamen Jurado Evaluador del Proyecto de Tesis**
III CICLO TALLER DE TESIS FCNM 2021
**Bach. JUSTINIANO VERA, Sandra del Pilar**
Escuela Profesional de Matemática

---

**DERÍVESE**, el documento indicado de la referencia a la **Oficina de Secretaría Académica de la FCNM**, para la emisión de la respectiva resolución.

Bellavista, 07 de octubre de 2022

Atentamente,

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

**Dr. Juan Abraham Méndez Velásquez**
**Decano**

JAMV/hc
Archivo

# Dictamen

**Asunto**: Evaluación de Proyecto de Tesis.

**Lugar**: Facultad de Ciencias Naturales y Matematica.

**Fecha**: 01 de Octubre de 2022.

Los que suscribimos: Dr. Pedro Canales García, Lic. Absalón Castillo Valdivieso., Dr. Edinson Montoro Alegre y Dr. Eugenio Cabanillas Lapa, designados por Resolución Decanal No Nº 092-2022-D-FCNM del 26 de Agosto de 2022, como Jurado Evaluador del Proyecto de Tesis: "Identificabilidad de un modelo económico de ecuaciones simultaneas a partir de su estructura via teoría de Grafos", presentado por la Bachiller Justiniano Vera Sandra del Pilar, para obtener el título profesional de Licenciado en Matemática, por la modalidad de tesis sin ciclo de tesis , cumplimos en dictaminar, después de una exhaustiva y meticulosa revisión, que: el Proyecto en mención reúne los requisitos exigidos para su aprobación, y continuación del trámite correspondiente.

Dr. Pedro Canales García

Lic. Absalón Castillo Valdivieso

Dr. Edinson Montoro Alegre

Dr. Eugenio Cabanillas Lapa

**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO**
**FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA**
**ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA**

**PROYECTO DE INVESTIGACIÓN**

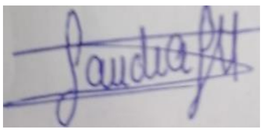
# ¨IDENTIFICABILIDAD DE UN MODELO ECONÓMICO DE ECUACIONES SIMULTÁNEAS A PARTIR DE SU ESTRUCTURA VÍA TEORÍA DE GRAFOS¨

**AUTOR:**
Sandra Del Pilar Justiniano Vera

**Asesor:**
Mg. Ever Franklin Cruzado Quispe

**Línea de investigación:**
Análisis Funcional y Ecuaciones Diferenciales.

Callao, 2022
**PERÚ**



| | |
|---|---|
| ------------------------------------------------ | ----------------------------------------------------------- |
| Sandra del Pilar Justiniano Vera | Mg. Ever Franklin Cruzado Quispe |
| Alumna | Asesor |

## INFORMACIÓN BÁSICA

1. **Facultad:** Facultad de Ciencias Naturales y Matemática
2. **Unidad de Investigación:** Departamento de Matemática
3. **Título:** Identificabilidad de un modelo económico de ecuaciones simultáneas apartir de su estructura vía Teoría De Grafos
4. **Autor:** Sandra del Pilar Justiniano Vera

   ORCID: 0000-0002-5385-2624
5. **Asesor:** Mg. Ever Franklin Cruzado Quispe

   ORCID: 0000-000
6. **Lugar de ejecución:** Facultad de Ciencias Naturales y Matemática
7. **Unidades de análisis:** Ecuaciones diferenciales
8. **Tipo de Investigación:** Básica
9. **Tema OCDE:** 1.01.01 (Matemática Pura)

## ÍNDICE

# INTRODUCCIÓN

El modelo de ecuaciones simultáneas es estándar, es decir, muy común en el análisis econométrico, Aunque, algunas ecuaciones pueden no ser identificables; lo que significa que la ecuación no se puede determinar únicamente a partir de datos estadísticos.

Una condición necesario y suficiente para la identificabilidad es ampliamente conocida bajo el nombre de ¨Condición de Rango¨. Sin embargo, para verificar esta condición, necesitamos conocer todas las ecuaciones del modelo de antemano. Esto es imposible, ya que estas ecuaciones deben estimarse a partir de datos y la estimación es significativa si y solo si las ecuaciones por ser identificables son conocidas.

En este trabajo, se desarrollará una condición necesaria y suficiente para una identificabilidad que sea completamente libre de datos estadísticos pero dependiente únicamente de la estructura del modelo. Es decir, en esta caracterización de identificabilidad sólo necesita saber qué variables son incluido en cada ecuación.

La teoría de grafos es utilizada para describir el resultado y el algoritmo de flujo diseñado para probar esta condición.

# I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

## 1.1 Descripción de la realidad problemática

El siguiente proyecto de investigación tiene como finalidad desarrollar una condición necesaria y suficiente para una identificabilidad en función únicamente de la estructura del modelo.

El modelo econométrico considerado es descrito de la siguiente forma estructural:

$$By + Gz = u \quad \ldots(1)$$

Donde:

$y\,\epsilon\mathbb{R}^q$, es un vector de variables endógenas

$z\ \epsilon\ \mathbb{R}^m$, es un vector de variables exógenas

$u\ \epsilon\ \ \mathbb{R}^q$, es un vector de variables de perturbación

$B\ \epsilon\ \mathbb{R}^{qxq}$ y $G\ \epsilon\ \mathbb{R}^{qxm}$ son matrices constantes.

Estos parámetros se estimarán a partir de las observaciones muestreadas en $y$ y $z$.

En este contexto de modelos de ecuaciones simultaneas, las variables conjuntamente dependientes se denominan variables endógenas y las variables independientes o explicativas como variables exógenas o predeterminadas. Asumiendo B no singular es posible transformar (1) como:

$$y = Qz + v \qquad \ldots(2)$$

Donde

$$Q \coloneqq -B^{-1}G, \qquad v \coloneqq B^{-1}u$$

Sin embargo, lo contrario no es cierto.

Es así que a partir del problema (2), se pretende demostrar vía grafos la identificabilidad del modelo (1), considerando únicamente las matrices estructurales que lo conforman.

## 1.2 Formulación del Problema

Por lo expuesto anteriormente, se pretende resolver y analizar las siguientes interrogantes:

### 1.2.1 Problema General

¿Será posible mostrar la identificabilidad de un modelo económico de ecuaciones simultáneas a partir de su estructura vía teoría de grafos?

### 1.2.2 Problemas Específicos

¿Será posible representar el modelo estructural de un sistema a partir de grafos?

¿Existe un algoritmo para mostrar la identificabilidad de un modelo económico?

## 1.3 Objetivos

### 1.3.1 Objetivo General

Mostrar la identificabilidad de un modelo económico de ecuaciones simultaneas a partir de su estructura vía teoría de grafos

### 1.3.2 Objetivos Específicos

Representar el modelo estructural de un sistema a partir de grafos.

Mostar un algoritmo para la identificabilidad de un modelo económico.

### 1.4 Justificación

En la presente investigación, se considerará un modelo econométrico, como fue mostrado en (1), que es ampliamente conocido, utilizado y de gran importancia en la econometría.

De dicho modelo se desarrollará una caracterización estructural de identificabilidad que está totalmente libre de cualquier valor de parámetros de $(B, G)$, dependiendo únicamente de la estructura de (1). Por estructura, nos referimos al conocimiento de qué ecuación incluye qué conjunto de variables; o dicho de otra manera, el patrón de las ubicaciones de cero y elementos distintos de cero en $(B, G)$.

Este hecho es de gran relevancia en el estudio de la economía, pues significa que no se depende de variables exógenas al modelo para sacar conclusiones, principalmente estadísticas sobre la aplicación de la ecuación en algún campo de la realidad que involucre la econometría.

### 1.5 Limitantes de la Investigación

#### 1.5.1 Teórica

En la búsqueda de la literatura con respecto al tema desarrollado, se basó principalmente en trabajos de nivel internacional, los cuales son obtenidos en su mayoría por medio de artículos científicos en revistas especializadas, de acceso restringido al público en general. Siendo el costo de suscripción a las mismas, el principal inconveniente.

Limitación que fue superada gracias al apoyo en la descarga de material, mediante el correo institucional del profesor asesor.

### 1.5.2 Temporal

Debido a la coyuntura actual a causa de la pandemia generada por el virus del COVID, uno de los principales inconvenientes a la hora de desarrollar el proyecto, es el de no poder desplazarse libremente hacia los centros de investigación, bibliotecas especializadas, o bancos de datos presenciales disponibles en la ciudad.

Esto genera principalmente una problemática con el tiempo, ya que debemos invertir más de este, en la búsqueda de información especializada únicamente vía online.

### 1.5.3 Espacial

Como se detalló en el inciso anterior y además conforme a los lineamientos establecidos por el Ministerio de Educación y la Superintendencia Nacional de Educación Superior Universitaria (SUNEDU) dictados en el marco de la emergencia sanitaria para prevenir y controlar el COVID-19, la presente investigación se proporcionará de manera virtual.

# II. MARCO TEÓRICO

## 2.1 Antecedentes: Internacionales y nacionales

De la literatura, extraemos los resultados más resaltantes sobre este tema.

**Wonnacott & Wonnacott** (1970), en su libro titulado Econometrics, examinaron la identificabilidad desde un punto similar de vista, los autores señalaron que la identificabilidad está esencialmente determinada (con probabilidad 1) por la estructura de (1).

**Anderson** (1979), en su artículo titulado Trygve Haavelmo and Simultaneous Equation Models, también hizo una observación similar. Además, introdujo el concepto de teoría de grafos para representar y analizar este problema con más profundidad.

**Yamada** (1990), en su artículo titulado Controllability and the theory of economic policy: a structural approach, donde gracias a la regla de política de Tinbergen se puede establecer que debe existir al menos la misma cantidad de instrumentos de política como el número de variables objetivo si deseamos realizar un conjunto de objetivos de política fijados arbitrariamente. El autor pudo concluir que el sistema económico estático es estructuralmente controlable si y solo si existe un conjunto de caminos disjuntos en la representación gráfica del sistema que conectan el conjunto de instrumentos a cada objetivo.

Debido a la naturaleza del trabajo no se encontró ninguna referencia nacional que afecte directamente el desarrollo de la presente tesis.

## 2.2 Bases teóricas

La presente sección está dedicada a mostrar resultados esenciales en el desarrollo del presente trabajo.

Para esto seguiremos lo mostrado en (Gujarati, 2010) y (Berge, 1973).

## REVISIÓN DE ALGUNOS CONCEPTOS ESTADÍSTICOS

En este apéndice se introducen, en forma muy general, algunos conceptos estadísticos que aparecen en este trabajo.

### Operadores de Sumatoria y de Producto

Con la letra mayúscula griega $\sum(\text{sigma})$ se indica la sumatoria. Así:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \ . \ . \ . + x_n$$

Algunas de las propiedades más importantes del operador de sumatoria S son:

$(1) \sum_{i=1}^{n} k = nk$, donde *k* es una constante. Así $\sum_{i=1}^{4} 3 = 4.3 = 12$.

$(2) \sum_{i=1}^{n} kx_i = k \sum_{i=1}^{n} x_i$, donde *k* es una constante.

$(3) \sum_{i=1}^{n} (a + bx_i) = na + b \sum_{i=1}^{n} x_i$, donde *a* y *b* son constantes y se emplean las propiedades (1) y (2) anteriores.

$(4)\ \sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i$ .

El operador de sumatoria se amplía a sumas múltiples. Así $\sum\sum$ , el operador de doble sumatoria se define del siguiente modo:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\left(x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{im}\right)$$

$$= \left(x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{n1}\right) + \left(x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{n2}\right) +$$

$$+ \ \ldots + \left(x_{1m} + x_{2m} + \ldots + x_{nm}\right)$$

Algunas de las propiedades de la doble sumatoria, $\sum\sum$ , son:

$(1)\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} x_{ij}$ , es decir, el orden en el cual se realice la doble sumatoria es intercambiable.

$$(2)\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{m} y_j$$

$$(3)\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(x_{ij} + y_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ij} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} y_{ij}$$

$$(4)\ \left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right]^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{i<j} x_i x_j$$

El operador de producto $\prod$ se define como: $\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 . x_2 \ldots x_n$ .

Por tanto: $\prod_{i=1}^{3} x_i = x_1 . x_2 . x_3$

**Varianza**

Sea *X* una variable aleatoria y sea $E(X) = \mu$ . La distribución o dispersión de los valores de *X* alrededor del valor esperado se mide por la varianza, la cual se define como:

$$\operatorname{var}(X) = \sigma_X^2 = E(X-\mu)^2$$

La raíz cuadrada positiva de $\sigma_X^2, \sigma_X$, se define como ***desviación estándar*** de *X*. La varianza o la desviación estándar da una indicación de qué tan cercanos o tan dispersos están los valores individuales de *X* respecto del valor de su media.

La varianza definida anteriormente se calcula de la siguiente forma:

$$\operatorname{var}(X) = \sum_x (X-\mu)^2 f(x) \qquad \text{si } X \text{ es una variable discreta}$$

$$\operatorname{var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (X-\mu)^2 f(x)\,dx \qquad \text{si } X \text{ es una variable continua}$$

Por conveniencia de cálculo, la fórmula de la varianza anterior se expresa también como

$$\begin{aligned}\operatorname{var}(X) = \sigma_X^2 &= E(X-\mu)^2 \\ &= E(X^2) - \mu^2 \\ &= E(X^2) - [E(X)]^2\end{aligned}$$

**Propiedades de la varianza**

1) $E(X-\mu)^2 = E(X^2) - \mu^2$, como ya se ha mencionado.
2) La varianza de una constante es cero.
3) Si *a* y *b* son constantes: $\operatorname{var}(aX+b) = a^2 \operatorname{var}(X)$.
4) Si *X* e *Y* son variables aleatorias independientes:

$$\operatorname{var}(X+Y) = \operatorname{var}(X) + \operatorname{var}(Y)$$

$$\text{var}\,(X - Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y)$$

Esto puede generalizarse a más de dos variables.

5) Si *X* e *Y* son variables aleatorias independientes, y *a* y *b* son constantes:

$$\text{var}\,(aX + bY) = a^2\,\text{var}(X) + b^2\,\text{var}(Y)$$

**Covarianza**

Sean *X* e *Y* dos variables con medias $\mu_x$ y $\mu_y$, respectivamente. Entonces la ***covarianza*** entre las dos variables se define como:

$$\text{cov}\,(X,Y) = E\{(X-\mu)(Y-\mu)\} = E(XY) - \mu_x\mu_y$$

Se observa con facilidad que la varianza de una variable es la covarianza de dicha variable con ella misma.

La covarianza se calcula de la siguiente forma:

$$\text{cov}\,(X,Y) = \sum_y\sum_x (X-\mu)(Y-\mu)\,f(x,y)$$

$$= \sum_y\sum_x XY\,f(x,y) - \mu_x\mu_y$$

Si *X* e *Y* son variables aleatorias discretas, y:

$$\text{cov}\,(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(X-\mu)(Y-\mu)\,f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} XY\,f(x,y)\,dx\,dy - \mu_x\mu_y$$

Si *X* e *Y* son variables aleatorias continuas.

**Propiedades de la covarianza**

1. Si *X* e *Y* son variables independientes, su covarianza es CERO, pues

$$\text{cov}\,(X,Y) \quad = E(XY) - \mu_x\mu_y$$

$$= \mu_x \mu_y \quad \begin{array}{l}\text{porque } \mathrm{E}(X,Y) = E(X)E(Y) = \mu_x \mu_y \\ \text{cuando } X \text{ y } Y \text{ son independientes}\end{array}$$

$$= 0$$

2. $\operatorname{cov}(a + bX\ ,\ c + dY) = bd\ \operatorname{cov}(X,Y)$ donde $a, b, c \text{ y } d$ son constantes.

**Coeficiente de Correlación**

El coeficiente de correlación (poblacional) $\rho$ (rho) se define como:

$$\rho = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{\{\operatorname{var}(X)\ \operatorname{var}(Y)\}}} = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

Así definido, $\rho$ es una medida de la asociación lineal entre dos variables y su valor se sitúa entre $-1$ y $+1$, donde $-1$ indica una perfecta asociación negativa, y $+1$ indica una perfecta asociación positiva.

De la fórmula anterior se ve que: $\operatorname{cov}(X,Y) = \rho \sigma_x \sigma_y$

**NOCIONES BÁSICAS DE ÁLGEBRA LINEAL**

**Vector columna**.

Una matriz que consta de *M* filas y sólo una columna se denomina ***vector columna***. Con las letras minúsculas en negritas que denotan vectores, un ejemplo es:

$$\boldsymbol{x}_{4\times 1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}$$

**Vector renglón**

Una matriz que consta de sólo un renglón y *N* columnas se llama ***vector renglón***. Ejemplos:

$$\boldsymbol{x}_{1\times 4} = [1 \quad 2 \quad 5 \quad -4] \qquad \boldsymbol{y}_{1\times 5} = [0 \quad 5 \quad -9 \quad 6 \quad 10]$$

**Transposición**

La transpuesta de una matriz *A* de $M \times N$, denotada por $A'$ (se lee *A* prima o *A* transpuesta), es una matriz $N \times M$ obtenida mediante el intercambio de renglones y columnas de *A*; es decir, el *i*-ésimo renglón de *A* se convierte en la *i*-ésima columna de *A*; es decir, el *i*-ésimo renglón de *A* se convierte en la *i*-ésima columna de $A'$. Por ejemplo:

$$A_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \qquad A'_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Como un vector es un tipo especial de matriz, la transpuesta de un vector renglón es un vector columna, y la de un vector columna un vector renglón. Por tanto:

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{x}' = [4 \quad 5 \quad 6]$$

Se utilizará la convención de indicar los vectores renglón mediante el símbolo de primo.

**Matriz cuadrada**

Una matriz con el mismo número de renglones y de columnas se denomina ***matriz cuadrada***. Por ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 7 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

**Matriz diagonal**

Una matriz cuadrada que posee al menos un elemento diferente de cero sobre la diagonal principal (que parte de la esquina superior izquierda hasta la esquina inferior derecha), y con valores restantes de cero, se denomina ***matriz diagonal***.

$$A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad B_{3\times 3} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Matriz escalar**

Una matriz diagonal cuyos elementos diagonales son todos iguales se denomina ***matriz escalar***. Un ejemplo es la matriz de varianza – covarianza de las perturbaciones poblacionales del modelo clásico de regresión lineal de la ecuación, a saber:

$$\text{var} - \text{cov}(u) = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma^2 \end{bmatrix}$$

**Matriz identidad o unitaria**

Una matriz diagonal cuyos elementos diagonales son todos 1 se denomina ***matriz identidad*** o ***unitaria***, y se denota por *I*. Es una clase especial de matriz escalar.

$$I_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_{4\times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Matriz simétrica**

Una matriz cuadrada cuyos elementos por encima de la diagonal son imágenes reflejo de los elementos por debajo de la diagonal principal se denomina ***matriz simétrica***. Además, una matriz simétrica es tal que su transpuesta es igual a sí misma; es decir $A = A'$. Es decir, el elemento $a_{ij}$ de *A* es igual al elemento $a_{ji}$ de $A'$.

**Matriz nula**

Una matriz cuyos elementos son todos CERO se denomina ***matriz nula*** y se denota por 0.

**Vector nulo**

Un vector renglón o columna cuyos elementos son todos cero se denomina ***vector nulo*** y se denota también por 0.

**Matrices iguales**

Se dice que dos matrices *A* y *B* son iguales si son del mismo orden y sus elementos correspondientes son iguales; es decir: $a_{ij} = b_{ij}$ para todo *i* y *j*. Por ejemplo:

Las matrices $A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ y $B_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ son iguales; es decir: $A = B$.

## OPERACIONES CON MATRICES

### Adición de matrices

Sean $A = \left[a_{ij}\right]$ y $B = \left[b_{ij}\right]$. Si *A* y *B* son del mismo orden, definimos la adición de matrices como: $A + B = C$, donde *C* es del mismo orden que *A* y *B*, y se obtiene como $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para *i* y *j*; es decir, *C* se obtiene al sumar los elementos correspondientes para la adición. Así, por ejemplo, si se tiene:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

y $C = A + B$, entonces: $$C = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 8 \\ 4 & 7 & 9 & 14 \end{bmatrix}$$

### Resta de matrices

La resta de matrices sigue el mismo principio que la adición de matrices, excepto que $C = A - B$; es decir, se restan los elementos de *B* de los elementos correspondientes de *A* para obtener *C*, en tanto *A* y *B* sean del mismo orden.

### Multiplicación por escalar

Para multiplicar una matriz *A* por un escalar $\lambda$ (un número real), se multiplica cada elemento de la matriz *A* por el escalar $\lambda$: es decir $\lambda A = \left[\lambda\, a_{ij}\right]$

Por ejemplo, $\lambda = 2$ y $A = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$

Entonces: $$\lambda A = 2A = \begin{bmatrix} -6 & 10 \\ 16 & 14 \end{bmatrix}$$

### Multiplicación de matrices

Sean $A: M \times N$ y $B: N \times M$. Entonces, el producto *AB* (en ese orden) está definido para ser una nueva matriz *C* del orden $M \times P$ tal que.

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{N} a_{ik}\, b_{kj} \qquad \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, M \\ j = 1, 2, \ldots, P \end{array}$$

Es decir, el elemento en el *i*-ésimo renglón y la *j*-ésima columna de *C* se obtiene al multiplicar los elementos del *i*-ésimo renglón de *A* por los elementos correspondientes de la *j*-ésima columna de *B* y sumar sobre todos los términos; es se conoce como regla de la multiplicación del renglón por columna

**Propiedades de la multiplicación de matrices**

1. La multiplicación de matrices no necesariamente es conmutativa, es decir, en general $AB \neq BA$. Por consiguiente, el orden en el cual se multiplican las matrices es muy importante, *AB* significa que *A* es *post-multiplicada* por *B* o *B* es *pre-multiplicada* por *A*.
2. Aunque existan $AB$ y $BA$, las matrices resultantes pueden no ser del mismo orden. Por tanto, si $A$ es $M \times N$ y $B$ es $M \times M$, mientras que $BA$ es $N \times N$, de donde se explica la diferencia de orden.
3. Aunque *A* y *B* sean matrices cuadradas, de manera que $AB$ y $BA$ estén definidas, las matrices resultantes no necesariamente serán iguales. Por ejemplo, sí:
4. Un vector renglón posmultiplicado por un vector columna es un escalar. Por tanto, considere los resultados de mínimos cuadrados ordinarios $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Si *u* es un vector columna y $u'$ un vector renglón, tenemos:

$$u'u = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & \cdots\cdots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

$$= u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \ . \ . \ . + u_n^2$$

$$= \sum u_i^2 \qquad \text{un escalar}$$

5. Un vector columna posmutiplicado por un vector renglón es una matriz. Como ejemplo, considere las perturbaciones poblacionales del modelo clásico de regresión lineal, a saber: $u_1, u_2, . . . , u_n$. Si *u* es un vector columna y $u'$ un vector renglón, tenemos:

$$uu' = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & \cdots\cdots & u_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} u_1^2 & u_1u_2 & u_1u_3 & \cdots\cdots & u_1u_n \\ u_2u_1 & u_2^2 & u_2u_3 & \cdots\cdots & u_2u_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \ddots & \cdots\cdots \\ u_nu_1 & u_nu_2 & u_nu_3 & \cdots\cdots & u_n^2 \end{bmatrix}$$

Que es una matriz de orden $n \times n$.

6. Una matriz post-multiplicada por un vector columna es un vector columna.

7. Un vector renglón posmultiplicado por una matriz es un vector renglón.

8. La multiplicación de matrices es *asociativa*; es decir $(AB)C = A(BC)$, donde *A* es $M \times N$, *B* es $N \times P$ y *C* es $P \times K$.

9. La multiplicación de matrices es distributiva respecto de la suma; es decir, $A(B+C) = AB + AC$ y $(B+C)A = BA + CA$.

**Transposición de matrices**

Definimos ya el proceso de transposición de matrices como el intercambio de renglones y de columna de una matriz (o de un vector). Ahora presentamos algunas propiedades de la transposición de matrices:

1. La transpuesta de una matriz transpuesta es la matriz original misma. Esto quiere decir $(A')' = A$.

2. Si *A* y *B* son conformables para la adición, entonces $C = A + B$ y $C' = (A+B)' = A' + B'$. Es decir, la transpuesta de la suma de dos matrices es la suma de sus transpuestas.

3. Si *AB* está definido, entonces $(AB)' = B'A'$. Es decir, la transpuesta del producto de dos matrices es el producto de sus transpuestas en orden contrario. Esto puede generalizarse así: $(ABCD)' = D'C'B'A'$.

4. La transpuesta de una matriz identidad *I* es la matriz identidad misma; esto es: $I' = I$

5. La transpuesta de un escalar es el mismo escalar. Por tanto, si $\lambda$ es un escalar, $\lambda' = \lambda$

6. La transpuesta de $(\lambda A)'$ es $\lambda A'$, donde $\lambda$ es un escalar. $\left[\text{Nota}: (\lambda A)' = A'\lambda' = A'\lambda = \lambda A'\right]$

7. Si *A* es una matriz cuadrada tal que $A = A'$, entonces *A* es una matriz simétrica.

**Inversión de matrices**

La inversa de una matriz cuadrada *A*, denotada por $A^{-1}$ (se lee *A* inversa), si existe, es una matriz cuadra única tal que: $AA^{-1} = A^{-1} = I$, donde *I* es una matriz identidad cuyo orden es el mismo orden que el de *A*. Por ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1/2 \\ 6/8 & -1/4 \end{bmatrix} \qquad AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Veremos cómo calcular $A^{-1}$ después de estudiar el tema de determinantes. Mientras tanto observe estas propiedades de la inversa:

1. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$; es decir, la inversa del producto de dos matrices es el producto de sus inversas en orden opuesto.

2. $\left(A^{-1}\right)' = (A')^{-1}$; es decir, la transpuesta de *A* inversa es la inversa de *A* transpuesta.

**DETERMINANTES**

**Propiedades de los determinantes**

1. Una matriz cuyo determinante tiene un valor de cero, se denomina ***matriz singular***, mientras que aquella con un determinante diferente de cero se

denomina ***matriz singular***. No hay inversa de una matriz como la recién definida para una matriz singular.

2. Si todos los elementos de cualquier renglón de *A* son ceros, su determinante es cero. Por tanto: $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 0$

3. $|A'| = |A|$; es decir, los determinantes de $A'$ y de *A* son los mismos.

4. El intercambio de dos renglones cualesquiera o de dos columnas cualesquiera de una matriz *A* cambian el signo de $|A|$.

5. Si cada elemento de un renglón o de una columna de *A* se multiplica por un escalar $\lambda$, entonces $|A|$ se multiplica por el escalar $\lambda$.

6. Si dos renglones o columnas de una matriz son idénticas, su determinante es CERO.

7. Si un renglón o una columna de una matriz es un múltiplo de otro renglón o columna de esa matriz, su determinante es CERO. Por tanto si $A = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, donde el primer renglón de *A* es el doble de su segundo renglón, $|A| = 0$. De forma más general, si cualquier renglón (columna) de una matriz es una combinación lineal de otros renglones (columnas), su determinante es CERO.

8. $|AB| = |A||B|$; es decir, el determinante del producto de dos matrices es el producto de sus determinantes (individuales).

**Rango de una matriz**

El rango de una matriz es el orden de la sub-matriz cuadrada más grande cuyo determinante no sea cero.

**Menor**

Si se borra el renglón *i*-ésimo y a columna *j*-ésima de una matriz *A* de $N \times M$, el determinante de la sub-matriz resultante se denomina el ***menor*** del elemento $a_{ij}$ (el elemento en el intercepto del renglón *i*-ésimo y de la columna *j*-ésima) y se denota por $|M_{ij}|$.

**Cofactor**

El cofactor del elemento $a_{ij}$ de una matriz *A* de $N \times M$, denotado por $c_{ij}$, se define como

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$$

En otras palabras, un cofactor es un menor con un signo asociado, con signo positivo si $i + j$ es par y negativo si $i + j$ es impar. Por tanto, el cofactor del elemento $a_{11}$ de la matriz *A* de $3 \times 3$ dado antes es $a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$, mientras que el cofactor del elemento $a_{21}$ es $-(a_{12}a_{33} - a_{31}a_{32})$ porque la suma de los subíndices es 2 y 1 es 3, un número impar.

**Matriz de cofactores**

Al reemplazar los elementos $a_{ij}$ de una matriz *A* por sus cofactores obtenemos una matriz conocida como ***matriz de cofactores*** de *A*, denotada por $(cof\ A)$.

**Matriz adjunta**

La matriz adjunta, escrita como $(adj\ A)$, es la transpuesta de cofactores, es decir:

$$(adj\ A) = (cof\ \ A)'$$

**Forma de encontrar la inversa de una matriz cuadrada**

Si *A* es cuadrada y no singular (es decir, $|A| \neq 0$), su inversa $A^{-1}$ se encuentra de la siguiente manera:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(adj\ A)$$

Los pasos comprendidos en el cálculo son los siguientes:

1. Encontrar el determinante de *A*. Si es diferente de cero, proceda al paso (2).
2. Reemplazar cada elemento $a_{ij}$ de *A* por su cofactor para obtener la matriz de cofactores.
3. Transponer la matriz de cofactores para obtener la matriz adjunta.
4. Dividir cada elemento de la matriz adjunta por $|A|$.

**Diferenciación matricial**

1. Si $a' = [a_1 \quad a_2 \quad \cdots\cdots \quad a_n]$ es un vector renglón de números y

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Es un vector columna de las variables $x_1$ , $x_2$ , . . . , $x_n$, entonces:

$$\frac{\partial(a'x)}{\partial x} = a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

2. Considere la matriz $x'Ax$ tal que

$$x'Ax = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots\cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Entonces: $\dfrac{\partial(x'Ax)}{\partial x} = 2Ax$

Que es un vector columna de *n* elementos, o

$$\frac{\partial(x'Ax)}{\partial x} = 2x'A$$

Que es un vector renglón de *n* elementos.

**Método Matricial para el Modelo de Regresión Lineal con k variables**

Si generalizamos los modelos de regresión lineal de dos y tres variables, el modelo de regresión poblacional de *k* variables (FRP) con la variable dependiente *Y* y $k-1$ variables explicativas $X_2$ , $X_3$ , . . . , $X_k$ puede escribirse del siguiente modo:

$$FRP:\ Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \ . \ . \ . + \beta_k X_{ki} + u_i; \quad i = 1, 2, ...., n \qquad (1)$$

Donde $\beta_1 =$ el intercepto, $\beta_2$ a $\beta_k =$ coeficientes parciales de pendientes, *u* = término de perturbación estocástica e *i*-ésima observación con *n* como tamaño de la población. La FRP (ecuación 1) se intercepta en la forma usual, la media o el valor esperado de *Y* condicionado a los valores fijos (en muestreo repetido) de $X_2\ ,\ X_3\ ,\ ...\ ,X_k$, es decir, $E\left(Y|\ X_{2i}\ ,\ X_{3i}\ ,\ ...\ ,X_{ki}\right)$ .

La ecuación (1) es una expresión abreviada para el siguiente conjunto de *n* ecuaciones simultáneas.

$$
\begin{array}{l}
Y_1 = \beta_1 + \beta_2 X_{21} + \beta_3 X_{31} + \ ...\ + \beta_k X_{k1} + u_1 \\
Y_2 = \beta_1 + \beta_2 X_{22} + \beta_3 X_{32} + \ ...\ + \beta_k X_{k2} + u_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
Y_n = \beta_1 + \beta_2 X_{2n} + \beta_3 X_{3n} + \ ...\ + \beta_k X_{kn} + u_n
\end{array} \tag{2}
$$

El sistema de ecuaciones (2) se escribe en una forma alterna, aunque en forma más ilustrativa.

$$
\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{21} & X_{31} & \cdots\cdots & X_{k1} \\ 1 & X_{22} & X_{32} & \cdots\cdots & X_{k2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{2n} & X_{3n} & \cdots\cdots & X_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \tag{3}
$$

$$
\begin{array}{cccccc}
y & = & X & \beta & + & u \\
n\times 1 & & n\times k & k\times 1 & & n\times 1
\end{array}
$$

Donde:

$y$ = vector columna $n\times 1$ de observaciones sobre la variable dependiente *Y*.

$X$ = matriz $n\times k$ , con *n* observaciones sobre las $k-1$ variables $X_2\,\mathrm{a}\,Y_2$ y la primera columna de números 1 representa el término del intercepto (esta matriz se conoce también como ***matriz de datos***).

$\beta$ = vector columna $k\times 1$ de los parámetros desconocidos $\beta_1\ ,\ \beta_2\ ,\ ...\ ,\beta_k$.

$u$ = vector columna $n\times 1$ de *n* perturbaciones $u_i$ .

Con las reglas de multiplicación y adición de matrices, el lector debe verificar que los sistemas (2) y (3) sean equivalentes.

El sistema (3) se conoce como representación matricial del modelo de regresión lineal general (de *k* variables). Se escribe en forma más compacta como:

$$\underset{n\times 1}{y} = \underset{n\times k}{X}\ \underset{k\times 1}{\beta} + \underset{n\times 1}{u} \qquad (4)$$

Donde no haya confusión sobre las dimensiones u órdenes de la matriz *X* y de los vectores $y, \beta, u$, la ecuación (4) se escribe tan sólo como:

$$y = X\beta + u \qquad (5)$$

Como ilustración de la representación matricial, considere el modelo de dos variables consumo – ingreso, a saber: $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + u_i$, donde *Y* es el gasto de consumo y *X* es el ingreso.

Con los datos de la información podemos escribir la formulación matricial tenemos:

$$\begin{bmatrix} 70 \\ 65 \\ 90 \\ 95 \\ 110 \\ 115 \\ 120 \\ 140 \\ 155 \\ 150 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 80 \\ 1 & 100 \\ 1 & 120 \\ 1 & 140 \\ 1 & 160 \\ 1 & 180 \\ 1 & 200 \\ 1 & 220 \\ 1 & 240 \\ 1 & 260 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \\ u_{10} \end{bmatrix}$$

$$y \quad = \quad X \quad \beta \quad + \quad u$$

$$10\times1 \qquad 10\times2 \quad 2\times1 \quad 10\times1$$

Como en los casos de dos y tres variables, el objetivo es estimar los parámetros de la regresión múltiple (1) y efectuar inferencias sobre ellos a partir de la información disponible. En la notación matricial esto equivale a estimar $\beta$ y a inferir sobre él. Para fines de estimación, podemos utilizar el método de mínimos cuadrados ordinarios (MCO) o el método de máxima verosimilitud. Pero como ya se mencionó, estos dos métodos producen valores estimados idénticos de los coeficientes de regresión. Por consiguiente, limitaremos nuestra atención al método de MCO.

**Supuestos del modelo clásico de Regresión Lineal en notación matricial**

Los supuestos en los cuales se basa el modelo clásico de regresión lineal están presentados en notación escalar y en notación matricial. El supuesto 1 de (6) significa que el valor esperado del vector de perturbaciones *u*, es decir, de cada unjo de sus elementos, es cero. Más explícitamente, $E(u)=0$ significa:

$$E\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(u_1) \\ E(u_2) \\ \vdots \\ E(u_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (6)$$

El supuesto 2 es una forma compacta de expresar los dos supuestos con cada notación escalar. Para ver esto, escribimos:

$$E(uu') = E\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots\cdots & u_n \end{bmatrix}$$

| | Notación escalar | Notación matricial |
|---|---|---|
| 1.– | $E(u_i)=0$ para cada $i$ | $E(u)=0$, donde *u* y 0 son vectores columna $n\times 1$, con 0 como vector nulo. |
| 2.– | $E(u_i,u_j)=0 \quad i\neq j$ <br> $E(u_i,u_j)=\sigma^2 \quad i=j$ | $E(uu')=\sigma^2 I$, donde *I* es una matriz de identidad $n\times n$. |
| 3.– | $X_2, X_3, \ldots, X_k$ son fijas o no estocásticas | La matriz *X*, $n\times k$ es no estocástica; es decir, consiste en un conjunto de números fijos. |
| 4.– | No hay relación lineal exacta entre las variables *X*; es decir, no hay multicolinealidad. | El rango de $X$ es $p(X)=k$, donde *k* es el número de columnas en *X* y *k* es menor que el número de observaciones, *n*. |
| 5.– | Para las pruebas de hipótesis $u_i\sim N(0,\sigma^2)$. | El vector *u* tiene una distribución normal multivariada, es decir $u\sim N(0,\sigma^2 I)$. |

## NOCIONES BÁSICAS DE TEORÍA DE GRAFOS

Aquí se dará algunos resultados de Teoría de Grafos.

**Teorema 1:** La suma de los grados de todos los vértices de un grafo es un número par, igual al doble del número de aristas del grafo.

**Teorema 2:** En todo grafo, el número de vértices impares es par.

**Teorema 3:** En todo grafo de "n vértices" (n≥2), siempre existen al menos, dos vértices mismo grado.

**Teorema 4:** Si un grafo de "n vértices" (n>2) exactamente dos vértices tienen el mismo grado, entonces existe exactamente, o bien vértice de grado cero, o bien un vértice de grado "n-1".

**Teorema 5:** Si todos los ciclos simples son de longitud par, entonces no contiene ningún ciclo de longitud impar.

Además, también veremos la definición de conexidad de un grafo, y mucho más.

## 2.3 Conceptual

### Variable Exógena

Estas variables están determinadas fuera del modelo, es decir, están predeterminadas, el modelo las toma como fijas y mantienen siempre el mismo valor.

### Variable Endógena

Estas variables se explican dentro de un modelo económico a partir de sus relaciones con otras variables (que a su vez pueden ser endógenas o exógenas).

### Modelo Económico

Es un conjunto de relaciones, generalmente cuantificables, entre varias variables que se utiliza como representación de una realidad más compleja. Sirve para facilitar la comprensión de una teoría y para ver las repercusiones en una variable de los cambios en otras.

**Econometría**

Es la rama de la economía que hace un uso extensivo de modelos matemáticos y estadísticos así como de la programación lineal y la teoría de juegos para analizar, interpretar y hacer predicciones sobre sistemas económicos, prediciendo variables como el precio de bienes y servicios, tasas de interés, tipos de cambio, las reacciones del mercado, el coste de producción, la tendencia de los negocios y las consecuencias de la política económica.

## 2.4 Definiciones de términos básicos

**Matriz**

Es un ordenamiento rectangular de número o de elementos arreglados en renglones y en columna. Más precisamente, una matriz de ***orden*** o de ***dimensión***, *M* por *N* (escrita como $M \times N$) es un conjunto de $M \times N$ elementos ordenados en *M* renglones y *N* columnas. Por tanto, si las letras en negritas denotan matrices, una matriz de *A* de ($M \times N$) se expresa como:

$$A = \left[a_{ij}\right] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2N} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \ddots & \cdots\cdots \\ a_{M1} & a_{M2} & & a_{MN} \end{bmatrix}$$

Donde $a_{ij}$ es el elemento que aparece en el *i*-ésimo renglón y la *j*-ésima columna de *A*, y donde $\left[a_{ij}\right]$ es una expresión abreviada para la matriz *A* cuyo elemento característico es $a_{ij}$ .

**Determinante**

Por cada matriz cuadrada *A* existe un número (escalar) conocido como el ***determinante*** de la matriz, que se denota por $\det A$ o por el símbolo $|A|$, donde $|\ |$ significa "el determinante de". Observe que una matriz por sí misma no tiene valor numérico, pero el determinante de una matriz es un número.

**Método matricial para el modelo de regresión lineal**

Si generalizamos los modelos de regresión lineal de dos y tres variables, el modelo de regresión poblacional de *k* variables (FRP) con la variable dependiente *Y* y $k-1$ variables explicativas $X_2\ ,\ X_3\ ,\ .\ .\ .\ ,X_k$ puede escribirse del siguiente modo:

$$FRP:\ Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \ .\ .\ .\ + \beta_k X_{ki} + u_i;\quad i = 1,2,....,n \qquad (1)$$

Donde $\beta_1 =$ el intercepto, $\beta_2$ a $\beta_k =$ coeficientes parciales de pendientes, *u* = término de perturbación estocástica e *i*-ésima observación con *n* como tamaño de la población. La FRP (ecuación 1) se intercepta en la forma usual, la media o el valor esperado de *Y* condicionado a los valores fijos (en muestreo repetido) de $X_2\ ,\ X_3\ ,\ .\ .\ .\ ,X_k$, es decir, $E\left(Y|\ X_{2i}\ ,\ X_{3i}\ ,\ .\ .\ .\ ,X_{ki}\right)$ .

La ecuación (1) es una expresión abreviada para el siguiente conjunto de *n* ecuaciones simultáneas.

$$Y_1 = \beta_1 + \beta_2 X_{21} + \beta_3 X_{31} + \ .\ .\ .\ + \beta_k X_{k1} + u_1$$

$$Y_2 = \beta_1 + \beta_2 X_{22} + \beta_3 X_{32} + \ .\ .\ .\ + \beta_k X_{k2} + u_2$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$Y_n = \beta_1 + \beta_2 X_{2n} + \beta_3 X_{3n} + \ . \ . \ . + \beta_k X_{kn} + u_n \tag{2}$$

El sistema de ecuaciones (2) se escribe en una forma alterna, aunque en forma más ilustrativa.

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{21} & X_{31} & \cdots\cdots & X_{k1} \\ 1 & X_{22} & X_{32} & \cdots\cdots & X_{k2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{2n} & X_{3n} & \cdots\cdots & X_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$\underset{n\times 1}{y} = \underset{n\times k}{X} \quad \underset{k\times 1}{\beta} + \underset{n\times 1}{u}$$

Donde:

$y$ = vector columna $n \times 1$ de observaciones sobre la variable dependiente *Y*.

$X$ = matriz $n \times k$, con *n* observaciones sobre las $k-1$ variables $X_2 \, \mathrm{a} \, Y_2$ y la primera columna de números 1 representa el término del intercepto (esta matriz se conoce también como ***matriz de datos***).

$\beta$ = vector columna $k \times 1$ de los parámetros desconocidos $\beta_1$ , $\beta_2$ , . . . , $\beta_k$

.

$u$ = vector columna $n \times 1$ de *n* perturbaciones $u_i$ .

Con las reglas de multiplicación y adición de matrices, el lector debe verificar que los sistemas (2) y (3) sean equivalentes.

El sistema (3) se conoce como representación matricial del modelo de regresión lineal general (de *k* variables). Se escribe en forma más compacta como:

$$y = X \beta + u \qquad (4)$$

$$n \times 1 \quad n \times k \quad k \times 1 \quad n \times 1$$

Donde no haya confusión sobre las dimensiones u órdenes de la matriz *X* y de los vectores $y, \beta, u$, la ecuación (4) se escribe tan sólo como:

$$y = X\beta + u \qquad (5)$$

Como ilustración de la representación matricial, considere el modelo de dos variables consumo – ingreso, a saber: $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + u_i$ , donde *Y* es el gasto de consumo y *X* es el ingreso.

Con los datos de la información podemos escribir la formulación matricial tenemos:

$$\begin{bmatrix} 70 \\ 65 \\ 90 \\ 95 \\ 110 \\ 115 \\ 120 \\ 140 \\ 155 \\ 150 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 80 \\ 1 & 100 \\ 1 & 120 \\ 1 & 140 \\ 1 & 160 \\ 1 & 180 \\ 1 & 200 \\ 1 & 220 \\ 1 & 240 \\ 1 & 260 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \\ u_{10} \end{bmatrix}$$

$$y = X \beta + u$$

$$10 \times 1 \quad 10 \times 2 \quad 2 \times 1 \quad 10 \times 1$$

Como en los casos de dos y tres variables, el objetivo es estimar los parámetros de la regresión múltiple (1) y efectuar inferencias sobre ellos a partir de la información disponible. En la notación matricial esto equivale a estimar $\beta$ y a inferir sobre él. Para fines de estimación, podemos utilizar el método de mínimos cuadrados ordinarios (MCO) o el método de máxima verosimilitud. Pero como ya se mencionó, estos dos métodos producen valores estimados idénticos de los coeficientes de regresión. Por consiguiente, limitaremos nuestra atención al método de MCO.

## GRAFO

Es un conjunto no vacío de puntos agrupado a un conjunto de segmentos cuyos dos extremos pertenecen al conjunto de puntos dados. Un grafo puede ser rectilíneo o curvilíneo, además las longitudes de lossegmentos y la disposición de los puntos son arbitrarias.

### Vértices

Son los puntos de intersección de aristas no colineales. Se denotan con letras mayúsculas del alfabeto latino o números.Y se representa gráficamente con círculos o cuadrados. Obs.: Los vértices que no pertenezcan a ninguna arista se denominan ¨aislados¨.

### Aristas

Son segmentos que unen dos vértices. Se denota con un par devértices.

Ejemplo: (A, B) o (1,5)

**Longitud**

Es el número de aristas de un camino

**Árbol**

Es un grafo conexo que contiene ciclos.

# III. HIPÓTESIS Y VARIABLES

## 3.1 Hipótesis

**Hipótesis General**

Es posible mostrar la identificabilidad de un modelo económico de ecuaciones simultaneas a partir de su estructura vía teoría de grafos

**Hipótesis Específicas**

Se puede representar el modelo estructural de un sistema estructural a partir de grafos.

Existe un algoritmo para la identificabilidad de un modelo económico.

### 3.1.1 Operacionalización de las variables

**Definición conceptual de variables**

**Variable dependiente (D):** Identificabilidad de un Modelo Económico de Ecuaciones Simultáneas.

Un modelo Económico de Ecuaciones Simultáneas es un modelo estadístico que viene dado por un conjunto de ecuaciones lineales. A menudo se utilizan en econometría para encontrar valores de los parámetros que se encuentran correlacionados y que suceden paralelamente, por ejemplo, en las estimaciones de la oferta.

**Variable independiente (I):** Teoría de Grafos.

La teoría de Grafos, también llamada teoría de las gráficas. estudia las propiedades de los mismos. Donde un grafo es un conjunto, no vacío, de objetos llamados vértices (o nodos) y una selección de pares de vértices, llamados aristas que pueden ser orientados o no. Típicamente, un grafo se representa mediante una serie de puntos (los vértices) conectados por líneas (las aristas).

| VARIABLE | DIMENSIONES | INDICADORES | MÉTODO | TÉCNICA |
|---|---|---|---|---|
| **D** | Identificabilidad | Modelo Estructural | Método de escritorio o de biblioteca. | Documentos cualitativos. Revisión bibliográfica. Trabajo con equipos de investigación. |
| | Modelo econométrico | Sistema de ecuaciones simultáneas | | |
| | Condición de rango | Vectores linealmente Independientes | | |
| I | Nodo | Grados | Método de escritorio o de biblioteca. | Documentos cualitativos. Revisión bibliográfica. Trabajo con equipos de investigación. |
| | Vector | Vector Dirigido | | |
| | Árbol | Ramificaciones | | |

# IV. METODOLOGIA DEL PROYECTO

## 4.1 Diseño metodológico

**Tipo de investigación**

La investigación es de tipo básica, pura o fundamental, pues se utiliza las teorías existentes para profundizar en ellas, generando nuevos conocimientos o criterios.

**Diseño de la investigación**

La investigación que se desarrolla presenta el tipo inductivo-deductivo. Se empezará definiendo los términos básicos en la formulación del problema multiobjetivo que conlleva un estudio de sistema de ecuaciones, matrices, ecuaciones simultáneas y teoría de grafos.

## 4.2 Método de Investigación

El método de investigación es básico teórico.

## 4.3 Población y Muestra

No se aplica para este tipo de proyecto.

## 4.4 Lugar de Estudio

El lugar de estudio es entendido como todo espacio físico, exento de ruidos y otras distracciones, que aporte en la realización de un trabajo, en este caso puede ser la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la UNAC, la Biblioteca Central de la UNAC; sin embargo, por la situación actual de pandemia y confinamiento el lugar de estudio será mi domicilio.

## 4.5 Técnicas e instrumentos para la recolección de la información

No se aplica para este tipo de proyecto.

### 4.6. Análisis y procesamiento de datos

Por la naturaleza del proyecto de investigación no se realiza ningún procedimiento de recolección de datos o análisis estadístico, más que la revisión de bibliografía (libros, páginas web, paper, etc.)

Se utilizará la técnica de revisión bibliográfica y trabajos con equipo de investigación, esto permitió de buena manera aplicar métodos relacionados a los criterios establecidos en cuestión de análisis de las variables y la realización de los objetivos.

### 4.7. Aspectos Éticos en Investigación.

El presente trabajo cumple las normas establecidas (artículo 427-438 del Código Penal, Ley sobre el Derecho de Autor-Decreto Legislativo N° 822) en nuestro país, no incurriendo en el delito contra la fe pública.

### 4.8. Si la orientación es hacia un proyecto de inversión, considera: Estudio técnico, Estudio económico-financiero, Estudio de la organización administrativa.

No se aplica para este tipo de proyecto.

### 4.9. Si el proyecto se orienta al impacto ambiental, considera: Área de estudio, Evaluación del impacto ambiental, Medidas ecológicas, Plan de supervisión ambiental.

No se aplica para este tipo de proyecto.

# V. CRONOGRAMA DE ACTIVIDADES

**CRONOGRAMA DE PROYECTO DE TESIS**

| | |
|---|---|
| **Proyecto de tesis:** | **"IDENTIFICABILIDAD DE UN MODELO ECONÓMICO DE ECUACIONES SIMULTÁNEAS A PARTIR DE SU ESTRUCTURA VÍA TEORÍA DE GRAFOS"** |
| **Tesistas** | Sandra del Pilar Justiniano Vera |
| **Fecha de Inicio:** | 1/11/2018 |
| **Fecha de término:** | 24/08/2019 |

| **ACTIVIDADES** | **INICIO** | **FINAL** | **DUR. (Semanas)** | **MAYO** | | | | **JUNIO** | | | | **JULIO** | | | | **AGOSTO** | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| Capacitación Teórica | **3/05/2021** | 23/05/2021 | **3** | | | | | | | | | | | | | | | | |
| **Componente 1:** Primer objetivo específico:Representar el modelo estructural de un sistema a partir de grafos. | **24/05/2021** | 20/06/2021 | **4** | | | | | | | | | | | | | | | | |
| **Componente 2:** Segundo objetivo específico: Representar el modelo estructural de un sistema a partir de grafos. | **21/06/2021** | 18/07/2021 | **4** | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Análisis y discusión de resultados | **19/07/2021** | 15/08/2021 | **3** | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Digitalización y defensa de tesis | **16/08/2021** | **3/11/2022** | **2** | | | | | | | | | | | | | | | | |

**LEYENDA**

Controles y revisiones por asesor

Clases, revisiones y presentaciones de anvance

## VI. PRESUPUESTO

| ESPECIFICACIONES | PORCENTAJE (%) | COSTO (S/) |
|---|---|---|
| **Curso de Tesis** | 51.22 | 4200 |
| **Materiales y equipos de oficina** | 12.19 | 1000 |
| **Textos de especialidad** | 24.39 | 2000 |
| **Foto copias, impresiones y espiralados** | 6.10 | 500 |
| **Servicios de Internet, software, CDs, USB** | 6.10 | 500 |
| **TOTAL** | **100.00** | **8200** |

# VII. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Anderson, T. (1990). *Trygve Haavelmo and Simultaneous Equation Models.* Stanford - California: Fourth Floor.

Berge, C. (1973). *Graphs and Hypergraphs.* Amsterdam: North-Holland.

Gujarati, D. N. (2010). *Econometría.* México: McGRAW-HILL/INTERAMERICANA EDITORES, S.A. DE C.V.

Wonnacott, P., & Wonnacott, R. (1970). *Econometrics.* New York: MC GRAW-HILL.

Yamada, T. (1990). Controllability and the theory of economic policy: a structural approach. *International Journal of Systems Science*, 723-737.

Yamada, T., & Kataoka, S. (1991). Identifiability of a simultaneous equations model of economy: a structural view. *International Journal of Systems Science*, 2663-2670. doi:10.1080/00207729108910822

## VIII. ANEXOS

### Matriz de consistencia

| FORMULACIÓN DEL PROBLEMA | OBJETIVOS | HIPÓTESIS | METODOLOGÍA | POBLACIÓN |
|---|---|---|---|---|
| **Problema General.** ¿Será posible mostrar la identificabilidad de un modelo económico de ecuaciones simultáneas a partir de su estructura vía teoría de grafos? | **Objetivo General** Mostrar la identificabilidad de un modelo económico de ecuaciones simultaneas a partir de su estructura vía teoría de grafos | **Hipótesis General** Es posible mostrar un modelo económico de ecuaciones simultaneas a partir de su estructura vía teoría de grafos | **Tipo** Básica, pura o fundamental, pues se utiliza las teorías existentes para profundizar en ellas, generando nuevos conocimientos o criterios. **Diseño** Inductivo-deductivo. Se empezará definiendo los términos básicos en la formulación del problema. **Método** Utilizaremos un método | **Población:** Modelos econométricos |
| **Problemas Específicos** ¿Será posible representar el modelo de un sistema estructural a partir de grafos? | **Objetivos Específicos** Representar el modelo de un sistema estructural a partir de grafos. | **Hipótesis Específicas** Se puede representar el modelo de un sistema estructural a partir de grafos. | | **Muestra:** Modelo de Ecuaciones Simultáneas |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ¿Existe un algoritmo para mostrar la identificabilidad de un modelo económico? | Mostrar un algoritmo para la identificabilidad de un modelo económico. | Existe un algoritmo para la identificabili--dad de un modelo económico. | inductivo-deductivo, para generalizar las definiciones, teoremas, y corolarios de resultados previos que involucran estudiar la relación entre el modelo de ecuaciones simultáneas y la teoría de grafos.<br><br>**Técnica**<br>Para la realización de este proyecto se utilizará la técnica de revisión bibliográfica y trabajos con equipo de investigación. | |